Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică
Constanţa

Niculae Cavachi, profesor,
Colegiul Naţional Pedagogic "Constantin Brătescu"
Constanţa

Lecţia 6. Clasa a VI-a

18. 01. 2014

Evaluare

Evaluarea a fost făcută de prof. Niculae Cavachi

Nr. crt.	Numele şi prenumele elevului	A.3	A.4	A.8	A.10	A.11	A.17	A.21	Punctaj
1.	**Albu Andra** L.T. "Traian" Constanţa	4	7	4	7	5	5	4	**36**
2.	**Alexandru Bianca** S.G. "Tudor Arghezi" Năvodari	-	-	7	7	1	7	7	**29**
3.	**Baroană Ioan-Cosmin** L.T. "Ovidius" Constanţa	-	1	2	1	-	-	-	**4**
4.	**Catană Alexandru-Marian** C.N.M.B. Constanţa	7	-	7	7	7	-	-	**28**
5.	**Culică Tania** L.T. "Ovidius" Constanţa								
6.	**Georgescu Tania** C.N.M.B. Constanţa								
7.	**Hiropedi Andreas** C.N.M.B. Constanţa	7	7	6	7	7	7	7	**48**
8.	**Hristu Stelian** C.N.M.B. Constanţa	7	7	2	7	7	4	3	**37**
9.	**Ibadula Ella-Nelin** C.N.M.B. Constanţa	7	7	7	7	7	6	7	**48**
10.	**Ion Cristian** L.T. "Ovidius" Constanţa								
11.	**Jitea Octavian** L.T. "Ovidius" Constanţa	7	7	7	7	7	5	1	**41**
12.	**Manea Mihnea** C.N.P. "C. Brătescu" Constanţa								
13.	**Marin Mircea-Mihai** Ş.G. Nr. 37 Constanţa	7	2	7	7	3	4	4	**34**
14.	**Mărăşescu Alexandru** Ş.G. "M. Viteazul" Constanţa								
15.	**Memiş Edis** L.T."Traian" Constanţa								
16.	**Minea Alexandra-Elena** L.T."Ovidius" Constanţa								
17.	**Pariza Teodora** C.N.M.B. Constanţa	7	7	7	7	4	7	7	**46**
18.	**Păşcălău Robert-Gabriel** S.G."Tudor Arghezi" Năvodari	6	7	7	7	7	7	7	**48**
19.	**Pârvu Ioana-Andreea** L.T. "Ovidius" Constanţa	3	1	-	3	5	-	-	**12**
20.	**Poşerba Dragoş** Ş.G. "Gh.Ţiţeica" Constanţa	7	7	6	7	7	4	7	**45**
21.	**Răduţ Florentina**								

	Ş.G.”Ion Minulescu” Constanţa								
22.	**Resmeriţă Cristina** Ş.G.”Spectrum” Constanţa								
23.	**Stan Alexandra** S.G.”George Enescu” Năvodari	7	-	-	7	7	-	-	**21**
24.	**Stoica Alexandru-Constantin** L.T.”Ovidius” Constanţa								
25.	**Tonca Tudor-Ştefan** L.T.”Ovidius” Constanţa								

Temă la algebră: problemele 3, 4, 8, 10, 11, 17 şi 21.

3. Numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ și a_n sunt direct proporţionale cu numerele: $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots, \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ respectiv $\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$. Dacă $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = 5760$ şi $a_{n-1} - a_n = 40$, calculaţi valorile numerelor $n,\ a_1$ și a_n.

Soluţie: Avem $a_1 = \frac{k}{6},\ a_2 = \frac{k}{12}, \dots, a_n = \frac{k}{(n+1)(n+2)},\ \ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = 5760 <=> k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = 5760 <=> k \cdot \frac{n}{2(n+2)} = 5760$ (1); $a_{n-1} - a_n = 40 <=> k \cdot \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = 40$ (2). Din (1) şi (2) prin împărţire membru cu membru obţinem $n^2(n+1) = 576 = 8^2 \cdot 9 => n = 8 \Rightarrow k = 14400$, $a_1 = \frac{k}{6} = 2400, a_n = a_8 = \frac{14400}{9\cdot 10} = 160.$

4. Calculaţi valorile numerelor $\overline{ab}$, scrise în baza 10, ştiind că $\overline{ab}$ şi $\overline{ba}$ sunt direct proporţionale cu două numere naturale consecutive.

(G.M. nr.4/2013)

Soluţie: $\frac{\overline{ab}}{n} = \frac{\overline{ba}}{n+1}, deci\ a < b$. Avem $(n+1) \cdot \overline{ab} = n \cdot \overline{ba} => \overline{ab} = 9 \cdot n\,(b-a)$ (1) $\Rightarrow 9 | \overline{ab}$ şi $(b-a)\,|\overline{ab}$; din $9|\ \overline{ab}$ şi $a < b$ rezultă $\overline{ab} \in \{18, 27, 36, 45\}$, dar $(b-a)|\overline{ab}$ deci $\overline{ab} \in \{36, 45\}$; doar 45 verifică relaţia (1), deci $\overline{ab} = 45$.

8. O sumă de bani a fost distribuită la 3 muncitori A, B şi C direct proporţional cu numerele $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ şi $\frac{1}{3}$. Unul dintre ei constată că primeşte astfel cu 66 lei mai mult decât dacă aceeaşi sumă s-ar fi distribuit invers proporţional cu numerele 12, 10 şi 15. Calculaţi:

a) valoarea sumei distribuite;

b) suma primită de către fiecare muncitor.

Soluţie: Fie a, b şi c sumele primite şi $S = a + b + c$. Avem $a = \frac{k}{6},\ \ b = \frac{k}{5},\ c = \frac{k}{3},\ S = \frac{7k}{10}$ (1). Fie x, y şi z sumele primite în a doua situaţie => $x = \frac{q}{12},\ y = \frac{q}{10}\ ,\ z = \frac{q}{15}\ ,\ S = x +$

$y + z = \frac{q}{4}$ (2); din (1) şi (2) $=> q = \frac{14k}{5}$, $x = \frac{7k}{30}$, $y = \frac{7k}{25}$, $z = \frac{14k}{25}$; avem $a < x$, $b < y$ şi $c > z$, deci $c - z = 66$ $<=> k = 450 \Rightarrow S = \frac{7 \cdot 450}{10}$, S = 315 lei, $a = 75$ lei, $b = 90$ lei şi $c = 150$ lei.

10. Se ştie că : $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \cdots = \frac{x_{2008}}{2008+x_{2008}}$ şi $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + \cdots + \frac{2008}{x_{2008}} = 251.$

a) Calculaţi valoarea sumei $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2008}$.

b) Demonstraţi că $S \vdots 41$ şi $S \vdots 49$.

Soluţie: **a)** $\frac{1}{x_1} + 1 = \frac{2}{x_2} + 1 = \cdots = \frac{2008}{x_{2008}} + 1$ $<=>$ $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \cdots = \frac{x_{2008}}{2008} \Leftrightarrow$

$<=>$ $x_2 = 2\, x_1$, $x_3 = 3\, x_1, \ldots, x_{2008} = 2008\, x_1 \Rightarrow 2008 \cdot \frac{1}{x_1} = 258$, $x_1 = 8$ $și$ $x_k = 8k$

$S = 8(1 + 2 + 3 + \cdots + 2008) = 8 \cdot 1004 \cdot 2009 = 16136288$.

b) $S = 8 \cdot 1004 \cdot 2009$, $2009 = 41 \cdot 49$, deci $S = 8 \cdot 1004 \cdot 41 \cdot 49$ $=> S \vdots 41$ $și$ $S \vdots 49$.

11. Fie A mulţimea numerelor $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1001}$, cu proprietăţile $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1001} = 2002$ şi $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1001}}{x_{1001}+2001}$. Câte numere naturale conţine mulţimea A?

Soluţie: avem $\frac{1}{x_1} = \frac{3}{x_2} = \frac{5}{x_3} = \cdots = \frac{2001}{x_{2001}}$ $=> x_2 = 3x_1$, $x_3 = 5x_1$, ..., $x_{1001} = 2001\, x_1$, deci
$x_k = (2k - 1)x_1$, $(\forall)k \in \{1, 2, \ldots, 1001\}$; $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1001} = 2002$ $<=>$
$x_1 (1 + 3 + 5 + \cdots + 2001) = 2002$ $<=>$ $x_1 \cdot 1001^2 = 2002$ deci $k = \frac{2}{1001} = \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 13}$;

$x_k \in \mathbf{N}$ $<=>$ $\frac{2(2k-1)}{7 \cdot 11 \cdot 13} \in \mathbf{N}$ $<=> (2k - 1) \vdots 1001$ deci $2k - 1 = 1001$, $k = 501$, deci mulţimea A conţine un singur număr natural, $x_{501} = 2$.

17. Fie $a, b \in \mathbf{N}^*$ şi $c \in \mathbf{Q}$, direct proporţionale cu p_1, p_2 și p_3, unde $p_1 < p_2 < p_3$ sunt numere naturale prime.

a) Demonstraţi că $c \in \mathbf{N}^*$.

b) Calculaţi valorile numerelor p_1, p_2 şi p_3 dacă $a + b < 35 = c$.

Soluţie: **a)** $\frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} = \frac{c}{p_3} = k$; din $a \cdot p_2 = b \cdot p_1$, p_1 şi p_2 numere prime rezultă $a \vdots p_1$, deci $\frac{a}{p_1} = k \in \mathbf{N} \Rightarrow c = k \cdot p_3 \in \mathbf{N}$.

b) $k \cdot p_3 = 35 => p_3 \in \{5, 7\}$; din $a + b < c$ obţinem $p_1 + p_2 < p_3$ cu $p_1 < p_2 < p_3$ deci $p_3 = 5$ nu convine; avem $p_3 = 7$ şi $k = 5 => p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{35}{7}$, deci $a = 10$, $b = 15$ şi $c = 35$.

21. Ştiind că numerele $x + y$, $y + z$ şi $z + x$ sunt direct proporţionale cu numerele $a + 1$, $a + 2$ respectiv $a + 3$, $a \in \mathbf{N}^*$, demonstraţi că: $2 < \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \leq 11,(7)$.

Soluţie: $\begin{array}{l} x + y = k\,(a+1) \\ y + z = k\,(a+2) \\ z + x = k\,(a+3) \end{array} => x + y + z = \frac{3k\,(a+2)}{2} => x = \frac{k(a+2)}{2},\ y = \frac{ka}{2},\ z = \frac{k(a+4)}{2}$; $\frac{x}{y} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} => 1 < \frac{x}{y} \leq 3 => 1 < \left(\frac{x}{y}\right)^2 \leq 9$ (1); $\frac{z}{x} = 1 + \frac{2}{a+2} => 1 < \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3} => 1 < \left(\frac{z}{x}\right)^2 \leq \frac{25}{9}$ (2); însumând membru cu membru (1) şi (2) obţinem:

$2 < \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \leq 9 + \frac{25}{9} = 11,(7)$, q. e. d.