Cercul Judeţean de Excelenţă la Matematică
Constanţa

Niculae Cavachi, profesor,
Colegiul Naţional Pedagogic "Constantin Brătescu"
Constanţa

Lecţia 5. Clasa a VI-a
11.01.2014

Evaluare

Evaluarea a fost făcută de prof. Niculae Cavachi

Nr. crt.	Numele şi prenumele elevului	A4	A7	A10	A14	G5	G7	G14	Total
1.	**Albu Andra** L.T. "Traian" Constanţa	6	7	7	7	7	7	7	**48**
2.	**Alexandru Bianca** S.G. "Tudor Arghezi" Năvodari	-	7	6	7	7	5	7	**39**
3.	**Baroană Ioan-Cosmin** L.T. "Ovidius" Constanţa	2	-	4	2	-	-	-	**8**
4.	**Catană Alexandru-Marian** C.N.M.B. C-ţa	-	-	-	-	-	-	-	-
5.	**Culică Tania** L.T. "Ovidius" Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
6.	**Georgescu Tania** C.N.M.B. Constanţa	-	-	-	-	7	7	7	**21**
7.	**Hiropedi Andreas** C.N.M.B. Constanţa	4	7	7	7	5	5	7	**42**
8.	**Hristu Stelian** C.N.M.B. Constanţa	2	7	7	4	6	7	-	**33**
9.	**Ibadula Ella-Nelin** C.N.M.B. Constanţa	7	7	7	7	7	5	7	**47**
10.	**Ion Cristian** L.T. "Ovidius" Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
11.	**Jitea Octavian** L.T. "Ovidius" Constanţa	2	7	7	7	-	7	7	**37**
12.	**Manea Mihnea** C.N.P. "C. Brătescu" Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
13.	**Marin Mircea-Mihai** Ş.G. Nr. 37 Constanţa	5	4	7	7	7	7	6	**43**
14.	**Mărăşescu Alexandru** Ş.G. "M. Viteazul" Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
15.	**Memiş Edis** L.T."Traian" Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
16.	**Minea Alexandra-Elena** L.T."Ovidius" Constanţa	7	7	5	7	2	6	7	**41**
17.	**Pariza Teodora** C.N.M.B. Constanţa	7	7	7	7	-	5	7	**40**
18.	**Păşcălău Robert-Gabriel** S.G."Tudor Arghezi" Năvodari	4	7	7	7	7	5	7	**44**
19.	**Pârvu Ioana-Andreea** L.T. "Ovidius" Constanţa								
20.	**Poşerba Dragoş** Ş.G. "Gh.Ţiţeica" Constanţa	7	6	6	7	7	7	7	**47**
21.	**Răduţ Florentina** Ş.G."Ion Minulescu" Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-

22.	**Resmeriţă Cristina** Ş.G.”Spectrum” Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
23.	**Stan Alexandra** S.G.”George Enescu” Năvodari	-	-	-	-	-	-	-	-
24.	**Stoica Alexandru-Constantin** L.T.”Ovidius” Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-
25.	**Tonca Tudor-Ştefan** L.T.”Ovidius” Constanţa	-	-	-	-	-	-	-	-

Temă la algebră: problemele 4, 7, 10 şi 14.

4. Dacă $\frac{a}{a-2}=\frac{b+15}{b+5}$, calculaţi valoarea maximă a raportului $\frac{a}{b}$, unde $a\in\mathbf{Q}_+$ şi $b\in\mathbf{N}^*$.

Soluţie: $a(b+5)=(a-2)(b+5) => 5a=b+15 => 5\cdot\frac{a}{b}=1+\frac{15}{b}$, deci $\frac{a}{b}$ este maxim <=> $\frac{15}{b}$ este maxim <=> $b=1 \Rightarrow 5a=16$ deci $a=\frac{16}{5}$. Valoarea maximă a raportului $\frac{a}{b}$ este egală cu $\frac{16}{5}$, valoare luată pentru $a=\frac{16}{5}$ și $b=1$.

7. Calculaţi numerele $\overline{abc}$, scrise în baza 10, pentru care $\frac{\overline{ab}}{5}=\frac{\overline{ca}}{3}=\frac{a^4}{4}$.

(G.M. nr.6-7-8/2012)

Soluţie $\overline{\mathrm{ab}}=\frac{5}{4}\cdot \mathrm{a}^4\leq 99 \Rightarrow a^4\leq\frac{396}{5}<80$, deci $a\leq 2$.

Dacă $a=1$ avem $\overline{1b}=\frac{5}{4}$, contradicție, deci $a=2$, atunci $\overline{2b}=\frac{5}{4}\cdot 16=20$, deci $b=0 \Rightarrow$

$\overline{c2}=\frac{3}{4}\cdot 16=12$, deci $c=1$ și obținem $\overline{abc}=201$.

10. Calculaţi valorile numerelor $a,b\in\mathbf{N}^*$ dacă $\frac{10-a^2}{2}=\frac{b^2-31}{10}=\frac{a}{b}$.

(Olimpiada locală, Constanţa)

Soluţie: Deoarece $\frac{a}{b}\in Q_+$, avem $a\leq 3$ și $b\geq 6$, $10a=b(b^2-31)$, $10a\leq 30$, cu egalitate pentru $a=3$, $b(b^2-31)\geq 30$ cu egalitate pentru $b=6$, deci $a=3$ și $b=6$, valori ce verifică ipoteza problemei.

14. Trei elevi, Moşanu, Niculescu şi Popescu, având prenumele Alex, Barbu şi Costel, au participat la un concurs de matematică, unde au primit cîte 15 probleme.
La final Moşanu a avut cel mai mic număr de probleme rezolvate corect.
Barbu şi Costel au rezolvat impreună cu 12 probleme mai mult decât Alex, Alex şi Costel au rezolvat împreună cu 4 probleme mai mult decât Barbu. Aflaţi care sunt numele complete ale celor trei copii şi câte probleme a rezolvat fiecare, ştiind că numărul problemelor rezolvate de Niculescu este $\frac{3}{7}$ din suma numerelor problemelor rezolvate de ceilalţi doi.

(G.M. nr.1/2013)

Soluţie: Fie x, y şi z numărul problemelor rezolvate de Moşanu, Niculescu , Popescu şi a, b şi c numărul problemelor rezolvate de Alex, Barbu şi Costel. Avem $x < y$, $x < z$ și $x + y + z = a + b + c$ (1)

Din $\begin{matrix} b + c = a + 12 \\ a + c = b + 4 \end{matrix}$ => $\begin{matrix} a + b + c = 2a + 12 \\ a + b + c = 2b + 4 \end{matrix}$ => $b = a + 4$ şi $c = 8$ (2)

$y = \frac{3}{7}(x + z)$ => $7y = 3(x + z)$ (3)

=> $10y = 3(x + y + z) = 3(a + b + c) \leq 3(8 + 11 + 15) = 102$ => $y \leq 10$, dar din (3) avem $y \vdots 3$ deci $y \in \{3,6,9\}$.

Pentru *y=9* obținem $x + z = 7$, fals deoarece $8 \in \{x, y, z\}$.

Pentru $y = 6$ obținem $x + z = 14$, $x = 6$ și $y = 8$ fals deoarece $8 - 6 \neq 4$.

Pentru $y = 9$ obținem $x + z = 21$. Cum $8 \in \{x, z\}$ și $x < z$ rezultă $x = 8$ și $z = 13$, $13 = 9 + 4$, deci

Moșanu rezolvă 8 probleme, Niculescu 9 probleme și Popescu 13 probleme. Costel rezolvă 8 probleme, Alex 9 probleme, Barbu 13 probleme. Moșanu Costel rezolvă 8 probleme, Niculescu Alex rezolvă 9 probleme şi Popescu Barbu rezolvă 13 probleme.

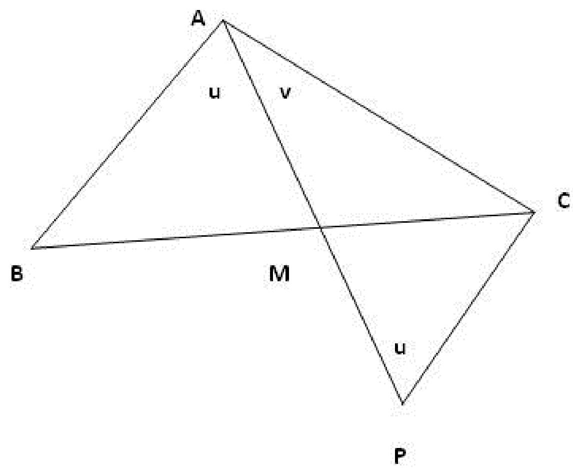
Geometrie – Congruenţa triunghiurilor

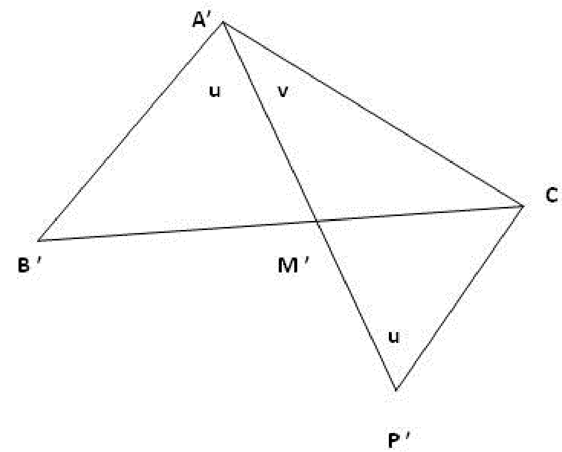
Temă la geometrie: Problemele 5, 7, şi 14.

5. Se consideră triunghiurile ΔABC şi $\Delta A'B'C'$, iar M, respectiv M' mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[B'C']$. Demonstraţi că dacă $[AM] \equiv [A'M']$, $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle B'A'M'$ şi $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle C'A'M'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

(Olimpiada judeţeană , Teleorman, 2000)

Soluţie: Fie P simetricul lui A faţă de M şi P' simetricul lui A' faţă de M'; $\Delta ABM \equiv \Delta PCM$ (L.U.L.) şi $\Delta A'B'M' \equiv \Delta P'C'M'$ (L.U.L), deci $\sphericalangle MPC \equiv \sphericalangle M'P'C'$ (1); obţinem că $\Delta APC \equiv \Delta A'P'C'$ (U.L.U.), deci $[AC] \equiv [A'C']$ (2). Analog $\Delta APB \equiv \Delta A'P'B'$ (U.L.U.), deci $[AB] \equiv [A'B']$ (3), dar $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ (u+v) (4). Din (2), (3) și (4) obţinem $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (L.U.L.), q. e. d.

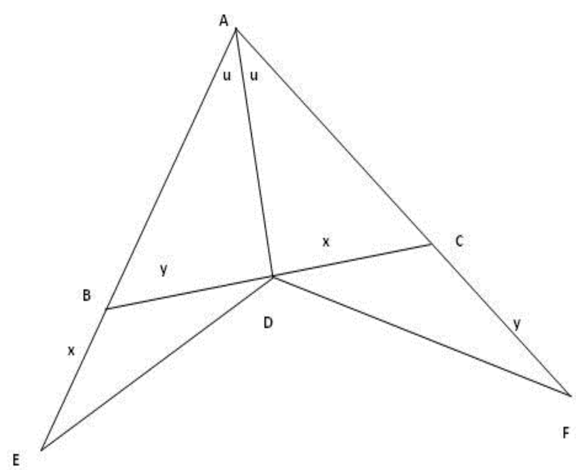




7. Fie triunghiul ΔABC şi [*AD* bisectoarea $\sphericalangle A$, ($D \in BC$). Se prelungeşte [*AB*] cu segmentul [*BE*] ≡ [*DC*], (*B* este între *A* şi *E*) şi [*AC*] cu segmentul [*CF*] ≡[*BD*] (*C* este între *A* şi *F*). Demonstraţi că dacă [*AE*] ≡ [*AF*], atunci [*AB*] ≡ [*AC*].

(Olimpiada judeţeană, Buzău, 2008)

Soluţie:

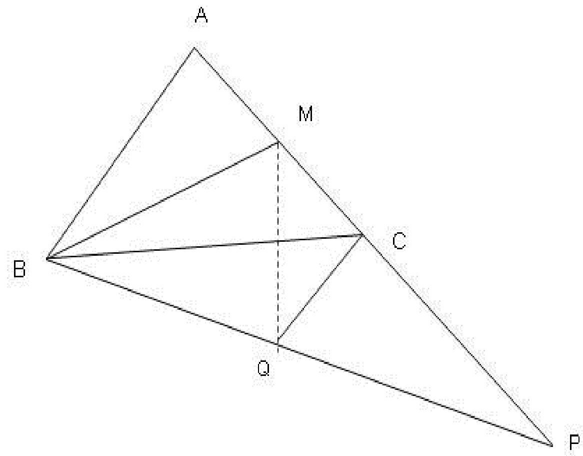


Dacă [*AE*]≡[*AF*], atunci $\Delta AED \equiv \Delta\ AFD$ (L.U.L.) => [*ED*] ≡ [*FD*] (1) $\Rightarrow$ $\Delta\ BED \equiv \Delta\ CDF$ (L.L.L.) => $\sphericalangle\ EBD \equiv \sphericalangle\ DCF$ => $\sphericalangle\ ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (au acelaşi suplement) (2) $\Rightarrow$ $\Delta\ ABC$ are două unghiuri congruente, deci este isoscel de bază [*BC*] $\Rightarrow$ [*AB*] ≡ [*AC*], q. e. d.

14. În triunghiul echilateral ΔABC fie *M* mijlocul lui [*AC*], *Q* simetricul lui *M* faţă de *BC* şi *P* simetricul lui *B* faţă de *Q*. Demonstraţi că punctele *M*, *C* şi *P* sunt coliniare.

(G.M. nr.1/2013)

Soluție: Deoarece Q este simetricul lui M față de BC, avem $\Delta\ BMC \equiv \Delta\ BQC \Rightarrow m(\sphericalangle MCQ) =$



$= 2 \cdot m(\sphericalangle MCB) = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ (1) și $m(\sphericalangle CQB) = m(\sphericalangle CBM) = 30^\circ$, deci $m(\sphericalangle CQB) = 90^\circ$.

$\Delta\ CQP \equiv \Delta\ CQB$ (C.C.) $\Rightarrow m(\sphericalangle QCP) = m(\sphericalangle QCB) = 60^\circ$ (2). Din (1) și (2) avem: $m(\sphericalangle MCP) =$

$= 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, deci M, C şi P sunt puncte coliniare, q. e. d.