Prof. Maria Burlăciuc

Şcoala Gimnazială "Tudor Arghezi" Năvodari

Tema 4

Numere raţionale pozitive

Exerciţii şi probleme rezolvate:

1. Fie $a \in \mathbf{N}$, $a \geq 2$ şi $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^n}$. Arătaţi că $S = \frac{a^n - 1}{a^n(a-1)}$.

Soluţie:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^n} \,\Big|\cdot\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} \cdot S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \ldots + \frac{1}{a^{n+1}}$$

$$S - \frac{S}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} - \ldots - \frac{1}{a^{n+1}}$$

$$S \cdot \frac{a-1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^{n+1}} \;/\cdot a \quad \Leftrightarrow \quad S(a-1) = 1 - \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow S(a-1) = \frac{a^n - 1}{a^n} \Leftrightarrow S = \frac{a^n - 1}{a^n(a-1)}$$

2. Demonstraţi că dacă $n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

(Identitatea lui Botez – Catalan)

Soluţie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

3. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, avem:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

Soluţie:

$$2^2 > 1 \cdot 2 \Rightarrow \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$3^2 > 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$4^2 > 3 \cdot 4 \Rightarrow \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4}$$

. . . .

$(n+1)^2 > n\cdot(n+1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ n∈**N***

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

4. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\ldots+\frac{a+n}{b+n} = n+1, \quad a, b, n \in \mathbf{N}^*$$

Soluţie:

Soluţia 1: Notez S = $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\ldots+\frac{a+n}{b+n}$

Dacă a>b ⇒ $\frac{a}{b} > 1; \frac{a+1}{b+1} > 1; \frac{a+2}{b+2} > 1; \ldots; \frac{a+n}{b+n} > 1$ ⇒ S > $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n+1}$ ⇒ S $> n+1$

Dacă a<b ⇒ $\frac{a}{b} < 1; \frac{a+1}{b+1} < 1; \frac{a+2}{b+2} < 1; \ldots; \frac{a+n}{b+n} < 1$ ⇒ S < $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n+1}$ ⇒ S $< n+1$

Dacă a = b ⇒ S = n+1. Deci a = b.

Soluţia 2: $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\ldots+\frac{a+n}{b+n} = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n+1} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{a}{b}-1\right)+\left(\frac{a+1}{b+1}-1\right)+\left(\frac{a+2}{b+2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{a+n}{b+n}-1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a-b}{b}+\frac{a+1-b-1}{b+1}+\frac{a+2-b-2}{b+2}+\ldots+\frac{a+n-b-n}{b+n}=0 \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}+\frac{a-b}{b+1}+\frac{a-b}{b+2}+\ldots+\frac{a-b}{b+n}=0$$

$(a-b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\ldots+\frac{1}{b+n}\right) = 0 \Leftrightarrow$ a - b =0 ⇔ a = b

$\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\ldots+\frac{1}{b+n} \neq 0 \ \forall\, b, n \in$ **N***

Exerciţii şi probleme propuse:

1. Să se determine numărul natural x astfel încât $\frac{5x-3}{x+1}$ să fie număr natural pătrat perfect.
2. Demonstraţi că fracţia $\frac{(n+2)(n+2013)(n+2014)}{2^{n+3}\cdot 5^{n}+1}$ este reductibilă , oricare ar fi n∈**N.**

3. Demonstraţi că fracţia $\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{2n}+7}{(4^n)^n\cdot 2^n\cdot 2+12}$, n∈**N***, este ireductibilă.

4. Demonstraţi că $\frac{25^n+14\cdot 5^n+33}{2\cdot 5^n+22}\in \boldsymbol{N}$ **,** oricare ar fi n∈**N.**

5. Determinaţi numerele naturale x, astfel încât $\frac{3x^2+5}{2x+3}$ să fie număr natural.

6. Determinaţi valorile naturale ale lui n pentru care fracţia $\frac{2^n\cdot 3^{n+1}+3}{2^{n+1}\cdot 3^n+4}$ este reductibilă.

7. Fie x, y>0 şi n∈**N*.** Să se determine $\frac{x}{y}$ dacă $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}+\ldots+\frac{x+n}{y+n}=\boldsymbol{n+1}$.

8. Fie n∈N* şi $\mathbf{S_n}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}$. Să se demonstreze că $\frac{1}{2}<S_n<1$.

9. Fie $\boldsymbol{S_n}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **,** n∈**N**, n≥ 2.

a) Demonstraţi că $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

b) Să se demonstreze că $S_n<\frac{1}{4}$.

c) Să se determine n pentru care $S_n=\frac{27}{110}$.

10. Să se demonstreze că pentru orice n∈**N**, n≥ 3, avem:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}$$

11. Să se demonstreze că oricare ar fi n∈**N**, n≥ 3, avem A = B unde:

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n},\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

12. Fie a,b,c,d cifre nenule distincte. Să se determine valorile naturale ale sumei:

S = $\overline{a,bc(d)}+\overline{b,cd(a)}+\overline{c,da(b)}+\overline{d,ab(c)}$.

13. Să se determine $\boldsymbol{S_n}=\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n+(n+1)}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+(2n-1)}$.

14. Să se demonstreze că pentru orice , n∈**N**, n≥ 2, avem $\boldsymbol{P_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}<\frac{1}{4}$.

Se utilizează formula $n^2-1=(n-1)(n+1)$.

15. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\overline{a,(b)}+\overline{b,(c)}+\overline{c,(a)}=10$.

b) $\overline{0,a(bc)}+\overline{0,b(ca)}+\overline{0,c(ab)}=n^2$ unde n∈**N.**

c) $\overline{0,ab(c)}+\overline{0,bc(a)}+\overline{0,ca(b)}=n^2$ unde n∈**N.**

16. Să se determine mulţimea $\mathbf{A}=\left\{n\in N\,\middle|\,\frac{2n^2+3n+2}{n+1}\in N\right\}$.

17. Să se determine n∈**N*** ştiind că fracţia $\frac{47n+24}{45n+22}$ se simplifică prin 23.

18. Aflaţi numerele naturale nenule x şi y, prime între ele, pentru care $\frac{2x^2+7y^2}{xy}$ este număr natural.

(G.M. nr. 7-8-9/2011)

19. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ ştiind că cifrele sale sunt numere prime şi $\frac{3a+2b}{6} = \frac{3b+c}{7} = \frac{a+4c}{11}$.

(G.M. nr. 5/2012)

20. Arătaţi că $\frac{5}{8} < \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} < \frac{7}{8}$. (G.M. nr. 10/2009)

21. Fie numerele $\mathbf{a} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2009}$ şi $\mathbf{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2010}$.

Comparaţi a cu b; b) Arătaţi că $\mathbf{a - b} = \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2010}$. (G.M. nr. 10/2009)

22. Arătaţi că $44 < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2010}{2009} < 2011$. (G.M. nr. 2/2010)

23. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0, n \geq 2$, astfel încât: $\frac{1}{x_1+1} + \frac{2}{x_2+1} + \frac{3}{x_3+1} + \ldots + \frac{n}{x_n+1} = 1$. Calculaţi în funcţie de n suma: $\frac{x_1}{x_1+1} + \frac{2x_2}{x_2+1} + \ldots + \frac{nx_n}{x_n+1}$. (G.M. nr. 12/2008)

24. Să se arate că numărul A = $\frac{1}{2014} + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{2013\cdot2014}$ este pătrat perfect.

25. Demonstraţi că $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \ldots + \frac{2013}{2014!} < 1$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$.

26. Fie x= $\overline{0,0(ab)}$, y = $\overline{0,0(0ab)}$, z = $\overline{0,0(00ab)}$ cu a şi b cifre nenule în sistemul zecimal. Să se determine $\overline{ab}$ astfel încât: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ să fie număr natural.

27. a) Demonstraţi că $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$ unde n, k $\in \mathbf{N}^*$

b) Determinaţi numărul natural n, ştiind că: $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \frac{1}{7\cdot10} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{2012}{6039}$.

28. Determinaţi media aritmetică a numerelor a şi b, unde $a = \frac{14}{17} + \frac{1414}{1717} + \frac{141414}{171717} + \ldots + \frac{141414\ldots14}{171717\ldots17}$ (în ultima fracţie, 14 şi 17 apar de câte 17 ori fiecare), iar b = $2002^4 - 2001 \cdot 2002^3 - 2001 \cdot 2002^2 - 2001 \cdot 2002$.

(G.M. nr. 1/2009)

29. Să se determine fracţia zecimală $\overline{0,70(abcd)}$, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

i) a 2007-a zecimală este un număr prim par;
ii) a 2008-a zecimală este multiplu al oricărui număr natural;
iii) a 2010-a zecimală este cel mai mare pătrat perfect de o cifră;
iv) suma cifrelor din perioadă este divizibilă cu 11.

30. Să se afle nnumerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\frac{34}{x^2+y^2+z^2}$ este număr natural.

31. Să se arate că pentru orice număr natural n, n≥ 1, numărul A = $\frac{36^n \cdot 5^{n+1} \cdot 7 - 2^{2n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n}{6^n \cdot 5^{n-1} \cdot 19 + 2^{n+1} \cdot 15^n}$ este număr natural.

32. Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât $\frac{n}{2}$ să fie pătrat perfect şi $\frac{n}{3}$ să fie cub perfect.

33. Determinaţi cifrele nenule a, b, c pentru care $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \overline{a,b(c)}$.

Temă : Problemele 8, 10, 22,23, 26, 27, 30 .

Bibliografie:

1. Artur Bălăucă, Ioan Ţicalo, Cătălin Budeanu, Gabriel Mîrşanu – OLIMPIADELE NAŢIONALE ALE ROMÂNIEI ŞI REPUBLICII MOLDOVA -OLIMPIADELE BALCANICE PENTRU JUNIORI – clasele V-VIII, Editura TAIDA, Iaşi, 2013
2. Artur Bălăucă – OLIMPIADE, CONCURSURI ŞI CENTRE DE EXCELENŢĂ – clasa a VI-a, Editura TAIDA, Iaşi, 2012
3. Dan Brânzei (coordonator) – Matematică- olimpiade şi concursuri şcolare, Editura PARALELA 45, Piteşti, 2010
4. Nicolae Grigore, Sorin Ion, Ramona Mâinea, Teodora Popa – MATEMATICĂ- OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE – Clasa a VI-a, Editura Nomina, Piteşti, 2012
5. Petre Năchilă, Cătălin Eugen Năchilă – EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ- clasa a VI-a, Editura Nomina, Piteşti, 2011
6. Radu Gologan (coordonator) - OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE- clasele IV-VI, Editura PARALELA 45,Piteşti, 2012
7. Colecţia GAZETA MATEMATICĂ
8. www.olimpiade.ro
9. www.mategl.com